

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Факультет компьютерных систем и информационных технологий
Кафедра прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета компьютерных
систем и информационных технологий
_____ Кочевский А. А.
» _____ 2023 г.



ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по учебной дисциплине

«Случайные процессы»

01.04.02 Прикладная математика и информатика

«Математическое моделирование сложных систем»

Разработчик:
профессор _____ Таращанский М. Т.

ФОС рассмотрен и одобрен на заседании кафедры прикладной математики
от 18 апреля 2023 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой _____ Малый В. В.

Луганск 2023 г.

**Паспорт
фонда оценочных средств по учебной дисциплине
«Случайные процессы»**

**Перечень компетенций (элементов компетенций),
формируемых в результате освоения учебной дисциплины**

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Формулировка контролируемой компетенции	Контролируемые темы учебной дисциплины	Этапы формирования (семестр изучения)
1	ОПК-1	способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	Тема 1. Общие свойства случайных процессов. Тема 2. Стохастический анализ Тема 3. Стационарные процессы Тема 4. Модели случайных процессов. Тема 5. Спектральная теория стационарных случайных процессов Тема 6. Преобразование стационарных случайных процессов линейными системами.	базовый (1)
2	ПК-2	способен активно участвовать в построении и исследовании новых математических моделей в естественных науках и определять возможные области их применения	Тема 1. Общие свойства случайных процессов. Тема 2. Стохастический анализ Тема 3. Стационарные процессы Тема 4. Модели случайных процессов. Тема 5. Спектральная теория стационарных случайных процессов Тема 6.	базовый (1)

			Преобразование стационарных случайных процессов линейными системами.	
--	--	--	--	--

**Показатели и критерии оценивания компетенций,
описание шкал оценивания**

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Показатель оценивания (знания, умения, навыки)	Контролируемые темы учебной дисциплины	Наименование оценочного средства
1	ОПК-1 ПК-2	знать: основы и концепции современной теории случайных процессов, направление развития и применения методов теории случайных функций. уметь: применять в научной и производственной деятельности знания, полученные по курсу «Случайные процессы», осуществлять сбор, обработку данных статистических экспериментов, проводить интерпретацию полученных результатов исследования, обращаться к информационным системам (Интернет, справочная и другая математическая литература) для пополнения и уточнения математических знаний. владеть навыками: применения понятийного аппарата и методов функционального анализа для выражения количественных и качественных отношений, математическими методами и алгоритмами в приложениях к техническим наукам.	Тема 1. Общие свойства случайных процессов. Тема 2. Стохастический анализ Тема 3. Стационарные процессы Тема 4. Модели случайных процессов. Тема 5. Спектральная теория стационарных случайных процессов Тема 6. Преобразование стационарных случайных процессов линейными системами.	фронтальные и индивидуальные опросы, курсовые работы, контрольные работы, промежуточная аттестация (экзамен)

**Фонды оценочных средств по дисциплине
«Случайные процессы»**

Вопросы для фронтальных и индивидуальных опросов:

1. Общее понятие случайного процесса (случайной функции), траектории случайного процесса. Примеры случайных процессов: случайное блуждание, процессы восстановления, модель страхования Крамера – Лундберга. Лемма о конечности п.н. процесса восстановления.
2. Производящие функции случайных величин, их основные свойства. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Соотношение между производящими функциями числа частиц в n -м и $(n+1)$ -м поколениях. Вывод уравнения для вероятности вырождения процесса.
3. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса.
4. Пространство $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ случайных величин, его основные свойства. Лемма о непрерывности скалярного произведения.
5. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Предельная теорема для надкритического случая.
6. Пространство траекторий случайного процесса, цилиндрическая сигма-алгебра на нем. Эквивалентное определение случайного процесса, как одного измеримого отображения в пространство траекторий.
7. Конечномерные распределения случайного процесса. Доказательство того, что конечномерные распределения однозначно определяют распределение всего процесса в целом.
8. Конечномерные распределения случайного процесса. Лемма об условиях симметрии и согласованности. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса (б/д).
9. Процессы с независимыми приращениями. Критерий существования процесса с независимыми приращениями в терминах характеристических функций приращений.
10. Пуассоновский процесс постоянной интенсивности как процесс с независимыми приращениями, доказательство существования. Явная конструкция пуассоновского процесса: процесс восстановления для экспоненциальных случайных величин. Следствие из явной конструкции: свойства траекторий пуассоновского процесса.
11. Ковариационная и корреляционная функции случайного процесса, их симметричность и неотрицательная определенность. Гауссовские случайные процессы. Доказательство существования гауссовского процесса с заданными функцией среднего и ковариационной функцией.
12. Винеровский процесс (процесс броуновского движения). Доказательство существования. Теорема о двух эквивалентных определениях винеровского процесса.

13. Модификация случайного процесса. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации (б/д). Доказательство существования непрерывной модификации у винеровского процесса. Теорема о недифференцируемости траекторий винеровского процесса (б/д).
14. Закон повторного логарифма для винеровского процесса (б/д). Смысл закона повторного логарифма. Локальный закон повторного логарифма для винеровского процесса.
15. Функции Хаара и Шаудера. Три вспомогательных леммы и построение явной конструкции винеровского процесса на $[0, 1]$. Построение явной конструкции винеровского процесса на $\mathbb{R}^+$.
16. Понятие фильтрации на вероятностном пространстве, согласованность случайного процесса с фильтрацией, естественная фильтрация случайного процесса. Марковские моменты и моменты остановки. Процессы Леви. Строго марковское свойство для процессов Леви.
17. Принцип отражения для винеровского процесса. Момент достижения винеровским процессом уровня x . Доказательство того, что он является моментом остановки.
18. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями. Примеры мартингалов и субмартингалов.
19. Мартингалы. Теорема об остановке для дискретного времени и следствие из нее.
20. Мартингалы. Опциональные моменты и теорема об остановке для случая непрерывного времени (б/д). Пример ее применения: теорема об оценке вероятности разорения в модели страхования Крамера–Лундберга.
21. Марковские цепи с дискретным временем. Фазовое пространство, переходные вероятности и начальное распределение марковской цепи. Лемма о свойствах переходных вероятностей, уравнения Колмогорова–Чепмена.
22. Однородные марковские цепи. Примеры: простейшее случайное блуждание на прямой и ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона.
23. Стационарное и предельное распределения однородной марковской цепи. Свойства цепи с начальным стационарным распределением. Эргодическая теорема для марковских цепей с дискретным временем.
24. Стационарность и предельность эргодического распределения марковской цепи.
25. Стохастическая непрерывность и непрерывность в среднем квадратичном случайного процесса.
26. Дифференцирование случайных процессов в среднем квадратичном. Критерий непрерывной дифференцируемости в среднем квадратичном случайного процесса на интервале (б/д).
27. Интегрирование случайных процессов в среднем квадратичном. Критерий интегрируемости в среднем квадратичном на отрезке и следствие из него.

28. Стационарные случайные процессы: стационарность в узком и широком смыслах. Взаимосвязь между ними. Стационарность в узком смысле марковской цепи с начальным стационарным распределением.

29. Теорема об эквивалентности двух понятий стационарности для гауссовских процессов.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «фронтальный и индивидуальный опрос»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Контрольные работы:

Типовые варианты контрольных работ

Контрольная работа №1

Вариант 1.

1. Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами m и σ . Чему равна ковариационная функция и дисперсия процесса $\eta t + b$, где b действительное число?

2. Пусть каждый человек, услышавший новость, может передать ее другому; при этом вероятность искажения смысла на противоположный постоянна и

равна $p=0,000001$. Какова вероятность услышать новость в неискаженном виде после того, как она «побывала» у большого числа людей?

Контрольная работа №2

Вариант 1.

1. Пусть $M\xi(t) = t$, $K_\xi(t_1, t_2) = t_1 t_2$, $M\eta(t) = -t$, $K_\eta(t_1, t_2) = t_1 t_2 e^{2(t_1+t_2^3)}$ и процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – некоррелированы. Найти математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию процесса $\xi(t) + \eta(t)$.
2. Пусть последовательность случайных величин ξ_n , $n \geq 0$, образует цепь Маркова. Доказать, что любая подпоследовательность этой последовательности также образует цепь Маркова.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «контрольная работа»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
Зачтено	Правильность решения заданий составляет 50-100%

Курсовые работы.

Примерные темы курсовых работ:

1. Случайные блуждания, броуновское движение, фрактальное броуновское движение (распределения вероятностей разнообразных функционалов, моментов остановки, в частности, моментов выхода на границы).
2. Мартингалы, локальные мартингалы, мартингальные преобразования.
3. Теория и задачи об оптимальных правилах остановки. Связь с задачами Стефана.
4. Марковские модели в теории массового обслуживания. Системы с ограничениями.
5. Предельные вероятности процесса гибели и размножения в стационарном режиме.
6. Преобразование стационарного случайного процесса при его прохождении через линейную динамическую систему.
7. Системы массового обслуживания с отказами.
8. Системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания.
9. Эргодические случайные процессы.
10. Линейные стохастические дифференциальные уравнения.
11. Приоритетные системы массового обслуживания.

12. Системы с многосервисным обслуживанием
13. Системы массового обслуживания с неполным доступом.
14. Модели разорения.
15. Динамика народонаселения.
16. Модели численности популяций.
17. Использование свойства марковости в моделировании временных рядов в экономических исследованиях.
18. Задача выделения сигнала на фоне шума.
19. Курсы ценных бумаг.
20. Задачи прогнозирования случайных процессов

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «курсовая работа»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении курсовой работы.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении курсовой работы.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении курсовой работы. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении курсовой работы. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Оценочные средства для промежуточной аттестации (экзамен)

Теоретические вопросы

1. Общее понятие случайного процесса (случайной функции), траектории случайного процесса. Примеры случайных процессов: случайное блуждание, процессы восстановления, модель страхования Крамера – Лундберга. Лемма о конечности п.н. процесса восстановления.
2. Простейшее случайное блуждание на прямой. Использование чисел Каталана для подсчета числа «неотрицательных» и «положительных» траекторий случайного блуждания, приходящих в нуль за время $2n$. Теорема о распределении первого момента возвращения в нуль для простейшего случайного блуждания. Теорема о вероятности возвращения в нуль.
3. Равномерная интегрируемость семейства случайных величин. Критерий равномерной интегрируемости сходящейся по распределению последовательности случайных величин (б/д). Достаточное условие равномерной интегрируемости последовательности случайных величин. Теорема об асимптотическом поведении времени, проведенном симметричным случайным блужданием в нуле за время n .
4. Простейшее симметричное случайное блуждание на прямой. Задача о разорении игрока. Теорема о вероятности выигрыша. 8. Производящие функции случайных величин, их основные свойства. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Соотношение между производящими функциями числа частиц в n -м и $(n+1)$ -м поколениях. Вывод уравнения для вероятности вырождения процесса.
5. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса.
6. Конечномерные распределения случайного процесса. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях (док-во необходимости). Условия симметрии и согласованности вероятностных мер на $(\square^n, B(\square^n))$ в терминах характеристических функций. Следствие для процессов, индексированных множеством $T \subset \square$.
7. Процессы с независимыми приращениями. Критерий существования процесса с независимыми приращениями в терминах характеристических функций приращений.
8. Пуассоновский процесс постоянной интенсивности как процесс с независимыми приращениями, доказательство существования. Лемма о “перескоке” и “недоскоке”. 13. Явная конструкция пуассоновского процесса: процесс восстановления для экспоненциальных случайных величин. Следствие из явной конструкции: свойства траекторий пуассоновского процесса.
9. Гауссовские случайные векторы. Теорема о трех эквивалентных определениях (б/д). Следствия из теоремы: смысл параметров

- многомерного нормального распределения и сохранение гауссовости при линейных преобразованиях. Критерий совокупной независимости для компонент гауссовского вектора. Многомерная центральная предельная теорема (б/д).
10. Ковариационная и корреляционная функции случайного процесса, их симметричность и неотрицательная определенность. Гауссовские случайные процессы. Доказательство существования гауссовского процесса с заданными функцией среднего и ковариационной функцией.
 11. Винеровский процесс (процесс броуновского движения). Доказательство существования.
 12. Плотности конечномерных распределений винеровского процесса.
 13. Модификация случайного процесса. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации (б/д). Доказательство существования непрерывной модификации у винеровского процесса.
 14. Закон повторного логарифма для симметричного случайного блуждания на прямой (б/д).
 15. Закон повторного логарифма для винеровского процесса (б/д). Локальный закон повторного логарифма для винеровского процесса.
 16. Понятие фильтрации на вероятностном пространстве, согласованность случайного процесса с фильтрацией, естественная фильтрация случайного процесса. Марковские моменты и моменты остановки. Строго марковское свойство и принцип отражения для винеровского процесса (оба б/д)
 17. Момент достижения винеровским процессом уровня x . Доказательство того, что он является марковским моментом. Теорема о совместном распределении максимума винеровского процесса на отрезке $[0, t]$ и Wt . Теорема Башелье.
 18. Марковские цепи с дискретным временем. Теорема о независимости «будущего» и «прошлого» при фиксированном «настоящем». Примеры марковских цепей: простейшее случайное блуждание на прямой и ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона.
 19. Фазовое пространство, матрицы переходных вероятностей и начальное распределение для марковской цепи с дискретным временем. Понятие однородной марковской цепи. Уравнения Колмогорова – Чепмена и следствия из них. Стационарное и предельное распределения однородной марковской цепи. Свойства цепи с начальным стационарным распределением.
 20. Эргодическая теорема для марковских цепей с дискретным временем. Стационарность и предельность эргодического распределения марковской цепи.
 21. Марковские цепи с непрерывным временем. Свойства переходных вероятностей. Теорема о существовании марковской цепи с заданными начальным распределением и переходными вероятностями.
 22. Однородные марковские цепи с непрерывным временем. Стохастическая полугруппа матриц переходных вероятностей.

- Стационарное и предельное распределения марковской цепи. Эргодическая теорема (б/д). Три следствия из эргодической теоремы: свойства эргодического распределения.
23. Инфинитезимальная матрица марковской цепи с непрерывным временем. Существование инфинитезимальной матрицы для стандартной марковской цепи (б/д). Обратные дифференциальные уравнения Колмогорова.
24. Прямые дифференциальные уравнения Колмогорова для марковской цепи с непрерывным временем. Следствия из них: уравнения для нахождения распределения цепи в произвольный момент времени t и для нахождения эргодического распределения.
25. Ковариационная функция стационарного в широком смысле процесса. Ее основные свойства. Теорема Бохнера – Хинчина (док-во достаточности). Спектральная плотность стационарного в широком смысле процесса. Ее вычисление с помощью формулы обращения.
26. Пространство $L_2(\Omega, F, P)$ случайных величин. Лемма о непрерывности скалярного произведения.

Типовые экзаменационные билеты

ЛУГАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. ДАЛЯ **Кафедра прикладной математики**

Вариант 1

1. Общее понятие случайного процесса (случайной функции), траектории случайного процесса. Примеры случайных процессов: случайное блуждание, процессы восстановления, модель страхования Крамера – Лундберга. Лемма о конечности п.н. процесса восстановления.

2. Дана матрица переходных вероятностей системы за 1 шаг

$$P(1) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Распределение вероятностей в начальный момент времени $\vec{p}(0) = (0,1; 0,4; 0,5)$

Найти вероятность $P(\xi(1)=3; \xi(2)=1; \xi(4)=2)$.

Утверждено на заседании кафедры прикладной математики _____.

Протокол _____

Зав. кафедрой

Экзаменатор

Малый В.В.

Таращанский М. Т.

ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.ДАЛЯ
Кафедра прикладной математики
Вариант 2

1. Понятие фильтрации на вероятностном пространстве, согласованность случайного процесса с фильтрацией, естественная фильтрация случайного процесса. Марковские моменты и моменты остановки. Строго марковское свойство и принцип отражения для винеровского процесса (оба б/д)
2. В процессе работы некоторой системы поток отказов пуассоновский с интенсивностью 1 отказ в сутки. При отказе системы сразу начинается ремонт. Время ремонта распределено по показательному закону. Среднее время ремонта 2 часа. В начальный момент времени система исправна. Найти вероятность того, что в момент времени t система исправна, найти предельные вероятности состояний.

Утверждено на заседании кафедры прикладной математики _____.

Протокол _____

Зав. кафедрой

Экзаменатор

Малый В.В.

Таращанский М. Т.

ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.ДАЛЯ
Кафедра прикладной математики
Вариант 3

1. Пространство $L_2(\Omega, F, P)$ случайных величин. Лемма о непрерывности скалярного произведения.
2. Работа динамической системы описывается следующим образом:
 $3\xi(t) = 2\frac{d\eta}{dt} + \eta(t)$. Характеристики входного процесса $M_\xi = 1$, $k_\xi(\tau) = e^{-2|\tau|}$.
 Найти математическое ожидание и дисперсию выходного процесса $\eta(t)$.

Утверждено на заседании кафедры прикладной математики _____.

Протокол _____

Зав. кафедрой

Экзаменатор

Малый В.В.

Таращанский М. Т.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству промежуточный контроль (экзамен)

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые

	решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)

Экспертное заключение

Представленный фонд оценочных средств (далее – ФОС) по дисциплине «Случайные процессы» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые формы и средства текущего и промежуточного контроля адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины представлены в полном объеме.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанный и представленный для экспертизы фонд оценочных средств рекомендуется к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической
комиссии факультета компьютерных
систем и информационных
технологий



Ветрова Н. Н.