

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Факультет компьютерных систем и информационных технологий

Кафедра прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель декана факультета компьютерных
систем и информационных технологий

Кочевский А. А.
19 апреля 2023 г.



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

«Функциональный анализ»

по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование

профиль подготовки «Механика деформируемых тел и сред»

Луганск – 2023

Лист согласования РПУД

Рабочая программа учебной дисциплины «Функциональный анализ» по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование. – 12 с.

Рабочая программа учебной дисциплины «Функциональный анализ» составлена на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 года № 10 (с изменениями и дополнениями), зарегистрированного в Министерстве юстиции Российской Федерации 06 февраля 2018 года за № 49933, учебного плана по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, (профиль «Механика деформируемых тел и сред») и Положения о рабочей программе учебной дисциплины в ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля».

СОСТАВИТЕЛЬ

канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики Таращанский М. Т.

Рабочая программа дисциплины утверждена на заседании кафедры прикладной математики

18 апреля 2023 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой прикладной математики _____ Малый В. В.

Переутверждена: «___» _____ 20__ г., протокол № _____

Согласована:

Декан факультета компьютерных систем и информационных технологий _____ Кочевский А. А.

Рекомендована на заседании учебно-методической комиссии факультета компьютерных систем и информационных технологий

19 апреля 2023 г., протокол № 8

Председатель учебно-методической комиссии факультета компьютерных систем и информационных технологий _____ Ветрова Н. Н.

© Таращанский М. Т., 2023 год

© ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», 2023 год

Структура и содержание дисциплины

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

Цель изучения дисциплины – овладение студентами основными понятиями и методами функционального анализа и его приложениями к дифференциальным и интегральным уравнениям.

Задачи: развитие логического и абстрактного мышления студентов; овладение студентами методами исследования и решения математических задач, выработка у студентов умения самостоятельно расширять свои математические знания и проводить анализ прикладных задач.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Дисциплина «Функциональный анализ» входит в блок дисциплин обязательной части учебного плана.

Содержание дисциплины является логическим продолжением содержания дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра и геометрия», «Дифференциальные уравнения» и служит основой для освоения дисциплин: «Уравнения математической физики», «Краевые задачи и вариационное исчисление».

3. Требования к результатам освоения содержания дисциплины

Студенты, завершившие изучение дисциплины «Функциональный анализ», должны *знать*:

- определение метрического пространства, полного метрического пространства, примеры метрических пространств;
- определение открытых, замкнутых, ограниченных, всюду плотных, нигде не плотных множеств в метрических пространствах;
- принцип вложенных шаров в полном метрическом пространстве;
- принцип сжимающих отображений и примеры его применения к алгебраическим, дифференциальным и интегральным уравнениям;
- определение компактного множества в метрическом пространстве, критерий компактности Хаусдорфа;
- критерий компактности множеств в пространствах $C_{[a,b]}$ и $l_p, p \geq 1$;
- определение линейного нормированного пространства, банахова пространства, примеры линейных нормированных пространств;
- определение линейного функционала и линейного оператора;
- определение ограниченного линейного функционала и ограниченного линейного оператора, понятие нормы функционала и оператора;
- общий вид непрерывного линейного функционала в $C_{[a,b]}$ и $l_p, p \geq 1$;
- теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха об обратном операторе;
- понятие предгильбертова и гильбертова пространства, примеры гильбертовых пространств;

- понятие проекции вектора на подпространство в гильбертовом пространстве, понятие ортогонального дополнения;
- ортонормированные системы векторов в гильбертовых пространствах, полиномы Лежандра;
- коэффициенты Фурье и их минимальное свойство, ряды Фурье;
- неравенство Бесселя и равенство Парсеваля;
- полнота тригонометрической системы в $L_2[a, b]$;
- теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве;

уметь: использовать основные понятия и методы функционального анализа; решать типовые задачи; использовать утверждения и теоремы функционального анализа при исследовании математических моделей на предмет существования решения, построения приближенного решения, устойчивости построенной аппроксимационной схемы приближенного решения, обращаться к информационным системам (Интернет, справочная и другая математическая литература) для пополнения и уточнения математических знаний.

владеть навыками: применения понятийного аппарата и методов функционального анализа для выражения количественных и качественных отношений, математическими методами и алгоритмами в приложениях к техническим наукам.

Перечисленные результаты образования являются основой для формирования следующих компетенций (в соответствии с ФГОС ВО и требованиями к результатам освоения основной профессиональной образовательной программы (ОПОП ВО):

общепрофессиональных:

ОПК-1 способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности

ОПК-5 способен использовать в педагогической деятельности научные основы знаний в сфере математики и механики

4. Структура и содержание дисциплины

4.1. Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Объем часов (з.е.)		
	Очная форма	Очно-заочная форма	Заочная форма
Объем учебной дисциплины (всего)	108 (3 з.е.)	108 (3 з.е.)	-
Обязательная аудиторная учебная нагрузка дисциплины (всего) в том числе:	56	48	-
Лекции	28	12	-

Семинарские занятия	-	-	-
Практические занятия	28	12	-
Лабораторные работы	-	-	-
Курсовая работа (курсовой проект)	-	-	-
Индивидуальное задание	-	-	-
Самостоятельная работа студента (всего)	52	84	-
Форма аттестации	экзамен	экзамен	-

4.2. Содержание разделов дисциплины

Тема 1. Элементы теории множеств

Множества. Операции над множествами. Функция на множестве. Бинарные отношения. Бесконечные множества. Мощность множества. Теорема Кантора—Бернштейна. Упорядоченность на множестве. Вполне упорядоченные множества. Аксиома выбора. Теорема Цермело. Лемма Цорна.

Тема 2. Линейные функциональные пространства

Примеры метрических пространств. Определение метрического пространства, примеры. Неравенства Гельдера и Минковского. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Окрестности точки, их свойства. Сходимость в метрическом пространстве. Полные метрические пространства. Сепарабельные пространства. Компактные множества, их свойства. Критерий компактности в пространстве непрерывных функций. Непрерывные операторы и функционалы, их свойства. Оператор сжатия, теорема Банаха. Теорема существования и единственности для дифференциальных уравнений. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.

Тема 3. Нормированные пространства, линейные операторы и функционалы.

Определение нормированных пространств, примеры. Сходящиеся последовательности, их свойства. Полные нормированные пространства, критерий полноты.

Определение и примеры линейных непрерывных операторов. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного непрерывного оператора. Полнота пространства линейных непрерывных операторов. Распространение линейных операторов. Последовательности линейных операторов. Теорема Банаха – Штейнгауза. Суперпозиции операторов, обратные операторы. Теоремы об обратимости операторов. Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства).

Линейные функционалы. Распространение линейных непрерывных функционалов, теорема Хана – Банаха. Сопряженное пространство, примеры сопряженных пространств. Слабая сходимость в нормированных пространствах. Слабая сходимость в сопряженном пространстве.

Второе сопряженное пространство. Рефлексивные пространства, примеры.

Счетно-нормированные пространства. Пространство основных функций. Обобщенные функции, действия над ними.

Тема 4. Гильбертовы пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы. Вполне непрерывные операторы

Определение гильбертова пространства, примеры. Ортогональные элементы, их свойства. Проекция элемента на подпространство. Процесс ортогонализации. Ортонормированные последовательности, ряды Фурье. Неравенства Бесселя, равенство Парсеваля. Полные ортонормированные последовательности. Полнота тригонометрической системы в $L^2_{[\pi, \pi]}$.

Сопряженные операторы, их свойства. Самосопряженные операторы, их свойства. Собственные числа и собственные элементы оператора, их свойства. Спектр оператора. Свойства спектра самосопряженного оператора. Резольвента оператора, ее свойства. Интегральные самосопряженные операторы, их свойства. Неограниченные симметричные операторы, их свойства. Дифференциальные симметричные операторы, уравнения Штурма – Лиувилля.

Определения вполне непрерывных операторов, примеры. Спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора. Разложение значений оператора по собственным элементам. Решение уравнения $(A - \lambda I)x = y$. Интегральные уравнения с симметричным ядром. Применение интегральных операторов к краевым задачам Штурма – Лиувилля.

Тема 5. Теория меры и интеграла.

Простейшие множества в R^n , их мера. Элементарные множества, их мера. Внешняя мера множества, ее свойства. Измеримые множества, мера измеримых множеств. Общее понятие меры.

Измеримые функции, действия над ними. Сходимость почти всюду, теорема Егорова. Сходимость по мере, ее свойства.

Простые интегрируемые функции, их свойства. Определения интегрируемой функции и интеграла Лебега. Свойства интеграла Лебега. Теоремы Лебега и Б. Леви о предельном переходе под знаком интеграла. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Теорема Фубини.

Пространства суммируемых функций, их полнота и сепарабельность.

4.3. Лекции

	Название темы	Объем часов
--	---------------	-------------

№ п/п		Очная форма	Очно- заочная форма	Заочная форма
1	Элементы теории множеств	4	2	-
2	Линейные функциональные пространства	8	2	-
3	Нормированные пространства, линейные операторы и функционалы.	4	2	-
4	Гильбертовы пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы. Вполне непрерывные операторы	6	2	-
5	Теория меры и интеграла	6	4	-
Итого:		28	12	-

4.4. Практические (семинарские) занятия

№ п/п	Название темы	Объем часов		
		Очная форма	Очно- заочная форма	Заочная форма
1	Элементы теории множеств	4	2	-
2	Линейные функциональные пространства	8	2	-
3	Нормированные пространства, линейные операторы и функционалы.	4	2	-
4	Гильбертовы пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы. Вполне непрерывные операторы	6	2	-
5	Теория меры и интеграла	6	4	-
Итого:		28	12	-

4.5. Лабораторные работы

Не предусмотрены

4.6. Самостоятельная работа студентов

№ п/п	Название темы	Вид СРС	Объем часов		
			Очная форма	Очно- заочная форма	Заочная форма
1	Элементы теории множеств	подготовка к контрольной работе; подготовка к экзамену	10	16	-
2	Линейные функциональные пространства	подготовка к контрольной работе; подготовка к экзамену	12	18	-
3	Нормированные пространства, линейные операторы и функционалы.	подготовка к контрольной работе; подготовка к экзамену	10	16	-
4	Гильбертовы пространства. Сопряженные и самосопряженные	подготовка к контрольной работе; подготовка к экзамену	10	16	-

	операторы. Вполне непрерывные операторы				
5	Теория меры и интеграла	подготовка к контрольной работе; подготовка к экзамену	10	18	-
Итого:			52	84	-

4.7. Курсовые работы/проекты

Курсовые работы (проекты) не предусмотрены.

5. Образовательные технологии

Преподавание дисциплины ведется с применением следующих видов образовательных технологий:

- традиционные объяснительно-иллюстративные технологии, которые обеспечивают доступность учебного материала для большинства студентов, системность, отработанность организационных форм и привычных методов, относительно малые затраты времени;

- технологии проблемного обучения, направленные на развитие познавательной активности, творческой самостоятельности студентов и предполагающие последовательное и целенаправленное выдвижение перед студентом познавательных задач, разрешение которых позволяет студентам активно усваивать знания (используются поисковые методы; постановка познавательных задач);

- технологии развивающего обучения, позволяющие ориентировать учебный процесс на потенциальные возможности студентов, их реализацию и развитие;

- технологии концентрированного обучения, суть которых состоит в создании максимально близкой к естественным психологическим особенностям человеческого восприятия структуры учебного процесса и которые дают возможность глубокого и системного изучения содержания учебных дисциплин за счет объединения занятий в тематические блоки;

- технологии модульного обучения, дающие возможность обеспечения гибкости процесса обучения, адаптации его к индивидуальным потребностям и особенностям обучающихся (применяются, как правило, при самостоятельном обучении студентов по индивидуальному учебному плану);

- технологии дифференцированного обучения, обеспечивающие возможность создания оптимальных условий для развития интересов и способностей студентов, в том числе и студентов с особыми образовательными потребностями, что позволяет реализовать в культурно-образовательном пространстве университета идею создания равных возможностей для получения образования

- технологии активного (контекстного) обучения, с помощью которых осуществляется моделирование предметного, проблемного и социального содержания будущей профессиональной деятельности студентов (используются активные и интерактивные методы обучения) и т.д.

Максимальная эффективность педагогического процесса достигается путем конструирования оптимального комплекса педагогических технологий и (или) их элементов на личностно-ориентированной, деятельностной, диалогической основе и использования необходимых современных средств обучения.

6. Формы контроля освоения дисциплины

Текущая аттестация студентов производится в дискретные временные интервалы лектором или преподавателем, ведущим практические занятия по дисциплине, в следующих формах:

- фронтальные и индивидуальные опросы;
- контрольные работы.

Фонды оценочных средств, включающие типовые индивидуальные задания, контрольные работы, позволяющие оценить результаты текущей и промежуточной аттестации обучающихся по данной дисциплине, помещаются в приложении к рабочей программе в соответствии с «Положением о фонде оценочных средств».

Промежуточная аттестация по результатам освоения дисциплины проходит в форме письменного экзамена, включающего теоретические вопросы и практические задания. В случае неполного, спорного или некорректного выполнения задания письменного экзамена, допускается уточняющий устный опрос студента, на основании которого возможна корректировка оценки результатов промежуточной аттестации. Допуск к промежуточной аттестации производится на основании положительных результатов по всем формам текущего контроля.

В экзаменационную ведомость и зачетную книжку выставляются оценки по шкале, приведенной в таблице.

Шкала оценивания	Характеристика знания предмета и ответов
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объеме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно четкие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.

неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы.
----------------------------	---

7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

Арлинский Ю. М. Введение в функциональный анализ [Текст] : учеб. пособие / Ю. М. Арлинский ; М-во образования и науки Украины, Восточноукр. нац. ун-т им. В. Даля. - 2-е изд. - Луганск : [Изд-во ВНУ им. В. Даля], 2006.-159с.

Колмогоров А.Н., Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А.Н., Фомин С.В. - 7-е изд. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 572 с. - ISBN 978-5-9221-0266-7 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102667.html> (дата обращения: 01.09.2022). - Режим доступа : по подписке.

Смолин Ю.Н., Начальный курс функционального анализа / Ю.Н. Смолин - М. : ФЛИНТА, 2015. - 378 с. - ISBN 978-5-9765-2381-4 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976523814.html> (дата обращения: 01.09.2022). - Режим доступа : по подписке.

Треногин В.А., Функциональный анализ : Учебник. / Треногин В.А. - 3-е изд., испр. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 488 с. - ISBN 5-9221-0272-9 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102729.html> (дата обращения: 01.09.2022). - Режим доступа : по подписке.

б) дополнительная литература:

Власова Е.А., Функциональный анализ: метод. указания к практическим занятиям / Е.А. Власова, Е.Е. Красновский, И.К. Марчевский; под ред. В.С. Зарубина. - М. : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. - 77 с. - ISBN -- - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/bauman_0005.html (дата обращения: 01.09.2022). - Режим доступа : по подписке.

Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ [Текст] / Б. З. Вулих. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 1967. - 415 с.

Ефимов А. В. Математический анализ (специальные разделы). Ч. 2. Применение некоторых методов математического и функционального анализа [Текст] : учеб. пособие / А. В. Ефимов, Ю. Г. Золотарев, В. И. Терпигорева. - М. : Высш. школа, 1980. - 295 с.

Крепкогорский В.Л., Функциональный анализ : учебное пособие / В.Л. Крепкогорский - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 116 с. - ISBN 978-5-7882-1650-8 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. -

URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785788216508.html> (дата обращения: 01.09.2022). - Режим доступа : по подписке.

Рид М. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ [Текст] / М. Рид, Б. Саймон ; пер. с англ. А. К. Погребкова и В. Н. Сушко; под ред. М. К. Поливанова. - М. : Мир, 1977. - 357 с.

Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения [Текст] / Р. Эдвардс ; пер. с англ. Г. Х. Бермана и И. Б. Раскиной; под ред. В. Я. Лина. - М. : Мир, 1969. - 1071 с.

в) методические указания:

Конспект лекций по функциональному анализу [Электронный ресурс] : учебное пособие / сост.: М. А. Таращанский, Е. Ю. Чалая. - Луганск : ЛНУ им. В. Даля, 2017. - 168 с.

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Функциональный анализ» для студентов 3 курса очной и заочной форм обучения направления подготовки «Прикладная математика и информатика» [Электронный ресурс] / сост. М. Т. Таращанский. - Луганск : ЛНУ им. В. Даля, 2019. - 66 с.

г) Интернет-ресурсы:

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации – <https://minobrnauki.gov.ru/>

Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки – <http://obrnadzor.gov.ru/>

Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования – <http://fgosvo.ru>

Федеральный портал «Российское образование» – <http://www.edu.ru/>

Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» – <http://window.edu.ru/>

Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – <http://fcior.edu.ru/>

Электронные библиотечные системы и ресурсы

Электронно-библиотечная система «Консультант студента» – <http://www.studentlibrary.ru/cgi-bin/mb4x>

Информационный ресурс библиотеки образовательной организации

Научная библиотека имени А. Н. Коняева – <http://biblio.dahluniver.ru/>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Освоение дисциплины предполагает использование академических аудиторий, соответствующих действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Прочее: рабочее место преподавателя, оснащенное компьютером с доступом в Интернет.

Программное обеспечение:

Функциональное назначение	Бесплатное программное обеспечение	Ссылки
Офисный пакет	Libre Office 6.3.1	https://www.libreoffice.org/ https://ru.wikipedia.org/wiki/LibreOffice
Операционная система	UBUNTU 19.04	https://ubuntu.com/ https://ru.wikipedia.org/wiki/Ubuntu
Браузер	Firefox Mozilla	http://www.mozilla.org/ru/firefox/fx
Браузер	Opera	http://www.opera.com
Почтовый клиент	Mozilla Thunderbird	http://www.mozilla.org/ru/thunderbird
Файл-менеджер	Far Manager	http://www.farmanager.com/download.php
Архиватор	7Zip	http://www.7-zip.org/
Графический редактор	GIMP (GNU Image Manipulation Program)	http://www.gimp.org/ http://gimp.ru/viewpage.php?page_id=8 http://ru.wikipedia.org/wiki/GIMP
Редактор PDF	PDFCreator	http://www.pdfforge.org/pdfcreator
Аудиоплеер	VLC	http://www.videolan.org/vlc/

**Паспорт
фонда оценочных средств по учебной дисциплине
«Функциональный анализ»**

**Перечень компетенций (элементов компетенций),
формируемых в результате освоения учебной дисциплины**

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Формулировка контролируемой компетенции	Контролируемые темы учебной дисциплины	Этапы формирования (семестр изучения)
1	ОПК-1	способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности	Тема 1. Элементы теории множеств Тема 2. Линейные функциональные пространства Тема 3. Нормированные пространства, линейные операторы и функционалы. Тема 4. Гильбертовы пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы. Вполне непрерывные операторы Тема 5. Теория меры и интеграла	основной (5)
2.	ОПК-5	способен использовать в педагогической деятельности научные основы знаний в сфере математики и механики	Тема 1. Элементы теории множеств Тема 2. Линейные функциональные пространства Тема 3. Нормированные пространства, линейные операторы и функционалы. Тема 4. Гильбертовы пространства. Сопряженные и самосопряженные	основной (5)

			операторы. Вполне непрерывные операторы Тема 5. Теория меры и интеграла	
--	--	--	--	--

**Показатели и критерии оценивания компетенций,
описание шкал оценивания**

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Показатель оценивания (знания, умения, навыки)	Контролируемые темы учебной дисциплины	Наименование оценочного средства
1	ОПК-1 ОПК-5	знать: определение метрического пространства, полного метрического пространства, примеры метрических пространств; определение открытых, замкнутых, ограниченных, всюду плотных, нигде не плотных множеств в метрических пространствах; принцип вложенных шаров в полном метрическом пространстве; принцип сжимающих отображений и примеры его применения к алгебраическим, дифференциальным и интегральным уравнениям; определение компактного множества в метрическом пространстве, критерий компактности Хаусдорфа; критерий компактности множеств в пространствах $C_{[a,b]}$ и $l_{p,p \geq 1}$; определение линейного нормированного пространства, банахова пространства, примеры линейных	Тема 1. Тема 2. Тема 3. Тема 4. Тема 5.	Фронтальные и индивидуальные опросы; контрольные работы; промежуточная аттестация (экзамен)

		нормированных пространств; определение линейного функционала и линейного оператора; определение ограниченного линейного функционала и ограниченного линейного оператора, понятие нормы функционала и оператора; общий вид непрерывного линейного функционала в $C[a, b]$ и $l_{p, p \geq 1}$; теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха об обратном операторе; понятие предгильбертова и гильбертова пространства, примеры гильбертовых пространств; понятие проекции вектора на подпространство в гильбертовом пространстве, понятие ортогонального дополнения; ортонормированные системы векторов в гильбертовых пространствах, полиномы Лежандра; коэффициенты Фурье и их минимальное свойство, ряды Фурье; неравенство Бесселя и равенство Парсеваля; полнота тригонометрической системы в $L_2[a, b]$; теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве. уметь: использовать		
--	--	---	--	--

		основные понятия и методы функционального анализа; решать типовые задачи; использовать утверждения и теоремы функционального анализа при исследовании математических моделей на предмет существования решения, построения приближенного решения, устойчивости построенной аппроксимационной схемы приближенного решения, обращаться к информационным системам (Интернет, справочная и другая математическая литература) для пополнения и уточнения математических знаний. владеть навыками: применения понятийного аппарата и методов функционального анализа для выражения количественных и качественных отношений, математическими методами и алгоритмами в приложениях к техническим наукам. Тема 1, Тема 2, Тема 3, Тема 4, Тема 5, Фронтальные и индивидуальные опросы; контрольные работы; задания; экзамен		
--	--	---	--	--

**Фонды оценочных средств по дисциплине
«Функциональный анализ»**

Вопросы для фронтальных и индивидуальных опросов:

Тема 1. Элементы теории множеств.

1. Доказать тождества: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$; $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
 $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
 $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \cap \bar{C}$; $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
 $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$; $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$;
 $(\bar{A} \cup B) \cap A = A \cap B$; $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$; $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
 $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
2. Доказать, что если отношения Φ_1 и Φ_2 симметричны, то симметричны и отношения $\Phi_1 \cup \Phi_2$; $\Phi_1 \cap \Phi_2$; Φ_1^{-1} ; $\Phi_1 \cdot \Phi_2^{-1}$.
3. Пусть $f: X \rightarrow Y, A \in X, B \in Y$. Доказать, что $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$;
 $f(A) \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$; $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = A$
4. Пусть $f: X \rightarrow Y, A \in X, B \in Y$. Доказать, что $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = A$;
 $f(A) \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$
5. Доказать, что объединение $\phi_1 \cup \phi_2$ эквивалентностей ϕ_1 и ϕ_2 на A является эквивалентностью на A тогда и только тогда, когда $\phi_1 \cup \phi_2 = \phi_1 \circ \phi_2$.
6. Доказать, что произведение $\phi_1 \circ \phi_2$ эквивалентностей ϕ_1 и ϕ_2 на A является эквивалентностью на A тогда и только тогда, когда $\phi_2 \circ \phi_1 = \phi_1 \circ \phi_2$.
7. Вывод формул двойственности для теоретико-множественных операций.
8. Доказать счетность объединения не более чем счетного набора счетных множеств.
9. Доказать, что при добавлении к бесконечному множеству конечного или счетного множества образуется множество, эквивалентное исходному.

Тема 2. Линейные функциональные пространства.

10. Из каких элементов состоит пространство l^2 ? Приведите пример элемента $x \in l^2$ и пример элемента $y \notin l^2$.
11. Как вычисляются расстояние, норма, скалярное произведение в пространстве l^2 ?
12. Из каких элементов состоит пространство $C[0;1]$? Приведите пример элемента $x \in C[0;1]$ и пример элемента $y \notin C[0;1]$.
13. Как вычисляются расстояние и норма в пространстве $C[a;b]$?

14. Из каких элементов состоит пространство $C^1[0;1]$? Приведите пример элемента $x \in C^1[0;1]$ и пример такого элемента y , что $y \in C[0;1]$, $y \notin C^1[0;1]$.
15. Из каких элементов состоит пространство $C^k[a;b]$? Как между собой упорядочены пространства $C^k[a;b]$ при разных $k=1,2,3,\dots$?
16. Из каких элементов состоит пространство $L^2(0;1)$? Приведите пример элемента $x \in L^2(0;1)$ и пример элемента $y \notin L^2(0;1)$.
17. Привести (с обоснованием) примеры метрических и нормированных пространств (включая $C[a,b]$, $C_2[a,b]$, $C^1[a,b]$, l_1 , l_2).
18. Вывести неравенство Коши–Буняковского и ввести стандартную норму в предгильбертовом пространстве. Привести примеры предгильбертовых пространств и нормированных пространств, не являющихся предгильбертовыми.
19. Вывести тождество параллелограмма и, используя его, привести примеры нормированных пространств, для которых норма не порождается какими-либо скалярными произведениями.
20. Сформулировать теорему об эквивалентности любых двух норм в конечномерном нормированном пространстве. Вывести следствия, касающиеся полноты и сепарабельности конечномерных нормированных пространств.
21. Привести примеры открытых множеств (включая лежащие в $C[a,b]$). Доказать теорему об объединениях и пересечениях открытых множеств и (схематично) теорему о структуре открытых множеств вещественной прямой.
22. Привести примеры замкнутых множеств. Доказать а) теорему, характеризующую замкнутые множества как дополнения к открытым, и б) теорему об объединениях и пересечениях замкнутых множеств.
23. Доказать теорему, характеризующую замкнутые множества в терминах сходящихся последовательностей точек.
24. Доказать: если некоторое множество плотно в другом, которое плотно в третьем, то и исходное множество плотно в третьем. Установить сепарабельность пространств R^n , $C[a,b]$, $C_2[a,b]$, l_1 и l_2 и привести пример несепарабельного метрического пространства.
25. Установить полноту пространств R^n , $C[a,b]$, l_1 , l_2 и привести примеры неполных метрических пространств.

Тема 3. Нормированные пространства, линейные операторы и функционалы.

26. Сформулировать теорему об эквивалентности любых двух норм в конечномерном нормированном пространстве. Вывести следствия, касающиеся полноты и сепарабельности конечномерных нормированных пространств.

27. Привести примеры открытых множеств (включая лежащие в $C[a,b]$). Доказать теорему об объединениях и пересечениях открытых множеств и (схематично) теорему о структуре открытых множеств вещественной прямой.
28. Привести примеры замкнутых множеств. Доказать а) теорему, характеризующую замкнутые множества как дополнения к открытым, и б) теорему об объединениях и пересечениях замкнутых множеств.
29. Доказать теорему, характеризующую замкнутые множества в терминах сходящихся последовательностей точек.
30. Доказать: если некоторое множество плотно в другом, которое плотно в третьем, то и исходное множество плотно в третьем. Установить сепарабельность пространств R^n , $C[a,b]$, $C_2[a,b]$, l_1 и l_2 и привести пример несепарабельного метрического пространства.
31. Установить полноту пространств R^n , $C[a,b]$, l_1 , l_2 и привести примеры неполных метрических пространств.
32. Доказать эквивалентность свойств непрерывности и ограниченности линейных отображений (операторов). Привести примеры таких операторов, включая интегральные операторы.
33. Привести примеры сжимающих отображений. Доказать теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Как найти такую точку с заранее заданной точностью?
34. Рассказать о приложениях теоремы о неподвижной точке в теории интегральных уравнений. Показать на примере, как строятся последовательные приближения к такой точке.
35. Примеры пополнений метрических пространств. Сформулируйте теорему о существовании пополнений. Какие особенности имеет случай нормированных пространств?

Тема 4. Гильбертовы пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы. Вполне непрерывные операторы.

36. Доказать теорему Пифагора (необходимое и достаточное условие сходимости ортогонального ряда в гильбертовом пространстве). Сформулировать достаточное условие сходимости ряда в банаховом пространстве. Привести примеры применения этих теорем.
37. Доказать существование и единственность ортогональной проекции точки гильбертова пространства на произвольное подпространство. Как связаны понятия проекции и элемента наилучшего приближения?
38. Вывести общее неравенство Бесселя и объяснить его связь с классическим неравенством Бесселя.
39. Как из неравенства Бесселя вывести утверждение о сходимости ряда Фурье в гильбертовом пространстве?
40. Доказать, что коэффициенты разложения элемента гильбертова пространства по ортонормированной системе совпадают с соответствующими коэффициентами Фурье.

41. Доказать теорему о разложении в ряд Фурье по ортонормированному базису и вывести ее следствие для классических рядов Фурье.
42. Вывести критерий полноты ортогонального семейства и доказать теорему о существовании ортонормированных базисов. Привести примеры таких базисов.
43. Доказать теорему об изоморфизме сепарабельных вещественных гильбертовых пространств одинаковой размерности.

Тема 5. Теория меры и интеграла.

44. Привести примеры алгебр, сигма-алгебр и мер, включая дискретные меры. Доказать свойства монотонности и полуаддитивности мер.
45. Доказать свойства непрерывности мер.
46. Изложить (схематично) доказательство существования меры Лебега.
47. Какие свойства имеют обобщенные функции распределения? Как по ним строятся соответствующие меры Стильтьеса? Какие особенности имеет случай абсолютно непрерывных мер?
48. Привести примеры множеств лебеговой меры 0 на прямой и плоскости. Доказать лемму о вариантах определения измеримой функции
49. Определить интеграл Лебега и вывести его свойство линейности, а также правило интегрирования неравенств в случае ступенчатых функций. Сформулируйте аналогичные утверждения для неотрицательных измеримых функций и укажите идею соответствующих доказательств.
50. Доказать свойство линейности интеграла Лебега и правило интегрирования неравенств вместе с его следствиями в случае суммируемых функций общего вида.
51. Вычислить интеграл Лебега от функции, равной нулю почти всюду. Доказать (частично) теорему о счетной аддитивности интеграла. Как вычисляется интеграл по дискретной мере?
52. Опишите (с обоснованием) связь между интегралами Лебега, а также Лебега–Стильтьеса и интегралом Римана (включая и случай несобственного интеграла Римана).
53. Приведите примеры сходимости почти всюду. Сформулируйте теоремы Егорова, Луна и Фубини.
54. Докажите теорему Лебега о мажорируемом предельном переходе. Сформулируйте теорему Леви о предельном переходе и лемму Фату.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «фронтальный и индивидуальный опрос»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объеме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет

	умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Контрольные работы:

Типовые варианты контрольных работ

Вариант 1.

1. Доказать, что любое измеримое множество E на прямой с мерой $\mu(E) = p > 0$ содержит измеримое подмножество меры q , $0 < q < p$.

2. Эквивалентны ли метрики $\rho(f, g) = \max_{[a, b]} |f(x) - g(x)|$ и

$$\sigma(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \text{ на } C[a, b]?$$

Вариант 2.

1. Пусть E – измеримое на сегменте $[0, 1]$ и для любого интервала Δ имеет место неравенство $\mu(E \cap \Delta) \leq \alpha \mu(\Delta)$, $\alpha < 1$. Доказать, что $\mu(E) = 0$.

2. Пусть (a_n) и (b_n) – последовательности точек нормированного пространства X , причём (a_n) сходится, а (b_n) расходится. Сходится ли последовательность $(a_n + b_n)$?

Вариант 3.

1. Пусть A_1 и A_2 – измеримые подмножества сегмента $[0, 1]$ и $\mu(A_1) + \mu(A_2) > 1$. Доказать, что $\mu(A_1 \cap A_2) > 0$.

2. Привести пример фундаментальной, но не сходящейся последовательности в пространстве $\mathbf{R}$ с метрикой $\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{|x - y| + 1}$.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «контрольная работа»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
5	Контрольная работа выполнена на высоком уровне (правильные ответы даны на 90-100% вопросов/задач)
4	Контрольная работа выполнена на среднем уровне (правильные ответы даны на 75-89% вопросов/задач)
3	Контрольная работа выполнена на низком уровне (правильные ответы даны на 50-74% вопросов/задач)
2	Контрольная работа выполнена на неудовлетворительном уровне (правильные ответы даны менее чем на 50%)

Оценочные средства для промежуточной аттестации (экзамен)

Типовые экзаменационные билеты

ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. ДАЛЯ Кафедра прикладной математики Вариант 1

1. Метрическое пространство, основные метрические пространства
2. Дана ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве со скалярным произведением. Найти угол между векторами x и y .

$$x = e_7 - \left(\frac{e_{23}}{2} + \frac{e_{24}}{3} \right), \quad y = 0.5(e_2 - 3e_{24}) + e_7$$

3. Пусть S – полукольцо. Доказать, что система $R = \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i : A_i \in S, i = 1, 2, \dots, n \right\}$ является кольцом.

Утверждено на заседании кафедры прикладной математики _____, протокол _____

Зав. кафедрой
Экзаменатор

Малый В.В.
Таращанский М. Т.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству промежуточный контроль (экзамен)

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)