

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Факультет компьютерных систем и информационных технологий

Кафедра прикладной математики



УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета компьютерных
систем и информационных технологий

Кочевский А. А.

« 30 » апреля 2023 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по учебной дисциплине

«Краевые задачи и вариационное исчисление»

01.03.02 Прикладная математика и информатика

«Математическое и программное обеспечение вычислительных машин и
компьютерных сетей»

Разработчик:

доцент _____ Малый В. В.

ст. препод. _____ Киркина Т. Ю.

ФОС рассмотрен и одобрен на заседании кафедры прикладной математики
от 18 апреля 2023 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой _____ Малый В. В.

Луганск 2023 г.

**Паспорт
фонда оценочных средств по учебной дисциплине
«Краевые задачи и вариационное исчисление»**

**Перечень компетенций (элементов компетенций),
формируемых в результате освоения учебной дисциплины**

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Формулировка контролируемой компетенции	Контролируемые темы учебной дисциплины	Этапы формирования (семестр изучения)
1	ПК-1	способен выполнять научно-исследовательские работы в соответствии с техническим заданием в составе научного коллектива	Тема 1. Функционал. Вариация и ее свойства. Тема 2. Основная лемма вариационного исчисления. Тема 3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами. Тема 4. Уравнение Эйлера. Тема 5. Задачи с подвижными концами. Тема 6. Задачи с подвижными границами. Тема 7. Применение вариационных методов к получению краевых задач математической физики. Тема 8. Постановки краевых задач и их физическая трактовка. Тема 9. Параболические УМФ или уравнение распространения тепла в стержне. Тема 10.	заключительный (8)

			Краевые задачи с граничными условиями первого и второго рода. Тема 11. КЗ для решения уравнений колебаний или волновых уравнений гиперболического типа. Тема 12. КЗ для уравнений эллиптического типа. Тема 13. Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Тема 14. Приложение вариационных методов.	
--	--	--	--	--

**Показатели и критерии оценивания компетенций,
описание шкал оценивания**

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Показатель оценивания (знания, умения, навыки)	Контролируемые темы учебной дисциплины	Наименование оценочного средства
1	ПК-1	знать: классические задачи математической физики и вариационного исчисления, различные типы решений и способы их получения, выбирать математические методы для их решения с использованием компьютеров. уметь: ставить и решать краевые задачи математической физики и простейшие задачи вариационного исчисления, применять различные способы получения решений для различных типов задач. иметь представление: о краевых задачах математической физики, о понятии функционала и	Тема 1. Функционал. Вариация и ее свойства. Тема 2. Основная лемма вариационного исчисления. Тема 3. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления с неподвижными границами. Тема 4. Уравнение Эйлера. Тема 5. Задачи с подвижными концами. Тема 6.	Фронтальные и индивидуальные опросы; контрольные работы; индивидуальные задания, промежуточная аттестация (зачет)

		его вариации, об основной формуле для вариации функционала, о вариационной производной функционала.	Задачи с подвижными границами. Тема 7. Применение вариационных методов к получению краевых задач математической физики. Тема 8. Постановки краевых задач и их физическая трактовка. Тема 9. Параболические УМФ или уравнение распространения тепла в стержне. Тема 10. Краевые задачи с граничными условиями первого и второго рода. Тема 11. КЗ для решения уравнений колебаний или волновых уравнений гиперболического типа. Тема 12. КЗ для уравнений эллиптического типа. Тема 13. Основные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Тема 14. Приложение вариационных методов.	
--	--	---	---	--

**Фонды оценочных средств по дисциплине
«Краевые задачи и вариационное исчисление»**

Вопросы для фронтальных и индивидуальных опросов:

Тема 1. Вариационное исчисление.

1. Определение классического функционала.
2. Связь между вариационными задачами и задачами математического анализа (метод Эйлера)
3. Простейшая задача вариационного исчисления.
4. Уравнение Эйлера.
5. Уравнения Эйлера для некоторых частных случаев классических функционалов
6. Задача об экстремуме классических функционалов на классе кривых, концы которых скользят по двум фиксированным вертикальным прямым.
7. Необходимые условия экстремума функционалов, зависящих от функции нескольких переменных типа $J[z] = \iint_G F(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) dx dy$.
8. Понятие вариационной производной функционала в случае простейшей задачи вариационного исчисления (с выводом по методу Эйлера).
9. Определение функционального пространства, линейного нормированного пространства.
10. Определение линейного функционала
11. Определение и доказательство единственности первой вариации $\delta J[h]$ (первого дифференциала) функционала $J[y]$.
12. Квадратичные функционалы: определение, примеры. Понятие второй вариации $\delta^2 J[h]$ функционала $J[y]$.
13. Теорема о необходимых условиях экстремума функционала $J[y]$.
14. Теорема о достаточных условиях минимума функционала $J[y]$.
15. Формулировка определения вариационной производной в общем случае.
16. Общее выражение для приращения ΔJ функционала в окрестности точки x .
17. Необходимые условия экстремума функционала $J = \int_a^b F(x, y, y') dx$
18. Изопериметрическая задача. Необходимые условия экстремума классического функционала

Тема 2. Краевые задачи.

1. Напишите общий вид линейного дифференциального уравнения второго порядка.
2. Напишите общий вид уравнения колебаний.

3. Что называется струной? Выведите уравнение колебаний струны.
4. Что называется стержнем? Выведите уравнение продольных колебаний стержня.
5. Напишите уравнение поперечных колебаний стержня. Приведите примеры граничных условий.
6. Что называется мембраной? Выведите уравнение поперечных колебаний мембраны.
7. Напишите уравнение поперечных колебаний тонкой пластинки. Приведите примеры граничных условий.
8. Сформулируйте задачу о равновесии мембраны.
9. Сформулируйте задачу об установившихся синусоидальных колебаниях мембраны.
10. Выведите телеграфное уравнение.
11. Напишите трехмерное волновое уравнение. Какие дополнительные условия ставятся при решении волнового уравнения?
12. Напишите общий вид уравнения диффузии. Выведите уравнение диффузии.
13. Выведите уравнение теплопроводности.
14. Напишите общий вид стационарного уравнения.
15. Выведите уравнение электростатики.
16. Выведите уравнение гидродинамики.
17. Сформулируйте задачу об обтекании твердого тела потоком жидкости.
18. Сформулируйте краевые задачи для уравнения теплопроводности.
19. Сформулируйте краевые задачи для одномерного волнового уравнения на примерах поперечных колебаний струны и продольных колебаний стержня.
20. Напишите уравнение Лапласа и уравнение Пуассона. Сформулируйте основные краевые задачи для этих уравнений.
21. К какому типу уравнений относится уравнение Лапласа? Пуассона?
22. Напишите уравнение Гельмгольца. Какие процессы описывает это уравнение?
23. К какому типу уравнений относится уравнение Гельмгольца?
24. Какое уравнение называется уравнением гиперболического типа? Приведите примеры.
25. Какие физические процессы описывает гиперболическое уравнение?
26. Какое уравнение называется уравнением параболического типа? Приведите примеры.
27. Какие физические процессы описывает параболическое уравнение?
28. Какое уравнение называется уравнением эллиптического типа? Приведите примеры.

29. Какие физические процессы описывает эллиптическое уравнение?
30. Запишите характеристическое уравнение. Что называется характеристикой дифференциального уравнения?
31. Какие характеристики имеет одномерное волновое уравнение?
32. Какие характеристики имеет двухмерное уравнение Лапласа?
33. Напишите каноническую форму уравнения гиперболического типа.
34. Напишите каноническую форму уравнения параболического типа.
35. Напишите каноническую форму уравнения эллиптического типа.
36. Дайте понятие об общем интеграле уравнения в частных производных. Приведите примеры.
37. Дайте физическое истолкование общего решения уравнения колебаний струны.
38. Выведите формулу Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения.
39. Расскажите о корректности постановки задач математической физики.
40. Что такое начальные и граничные условия? С чем связана необходимость в постановке дополнительных условий? Приведите примеры.
41. Что называется задачей Коши? Для какого типа уравнений ставится задача Коши? Приведите примеры.
42. Что называется краевой задачей? Для какого типа уравнений ставится краевая задача? Приведите примеры.
43. Что называется смешанной задачей? Для какого типа уравнений ставится смешанная задача? Приведите примеры.
44. Докажите единственность решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
45. Докажите единственность решения задачи Неймана для уравнения Пуассона. В чем особенность решения этой задачи?
46. Докажите единственность решения третьей краевой задачи для уравнения Пуассона.
47. Что можно сказать о единственности решения краевых задач, связанных с уравнением Гельмгольца?
48. Докажите единственность решения задачи для уравнения теплопроводности.
49. Докажите единственность решения задачи о колебаниях струны.
50. Дайте общее решение волнового уравнения в сферических координатах в случае радиальных колебаний. Каково физическое истолкование этого решения?

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «фронтальный и индивидуальный опрос»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объеме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно четкие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Контрольные работы:

Типовые варианты контрольных работ

Вариант № 1

1. Задача об экстремуме классических функционалов на классе кривых, концы которых скользят по двум фиксированным вертикальным прямым. Необходимые условия экстремума. Случай полужакреплённых концов.
2. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,0)$ до эллипса

$$4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Вариант № 2

1. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия слабого и сильного экстремума. Уравнение Эйлера. Теорема об условиях гладкости экстремалей (формулировка).
2. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(2,0,5)$ до поверхности

$$z = x^2 + y^2.$$

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «контрольная работа»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
5	Контрольная работа выполнена на высоком уровне (правильные ответы даны на 90-100% вопросов/задач)
4	Контрольная работа выполнена на среднем уровне (правильные ответы даны на 75-89% вопросов/задач)
3	Контрольная работа выполнена на низком уровне (правильные ответы даны на 50-74% вопросов/задач)
2	Контрольная работа выполнена на неудовлетворительном уровне (правильные ответы даны менее чем на 50%)

Варианты индивидуальных заданий:

Типовые варианты индивидуальных заданий

Вариант № 1

1.	Найти экстремаль функционала:	$\mathcal{J}[y] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx; \quad y(-1) = 1, y(0) = 0.$
2.	Найти экстремаль функционала:	$\mathcal{J}[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - y) e^{2x} dx; \quad y(0) = 0, y(1) = e^{-1}.$

3.	Найти экстремаль функционала:	$\mathcal{L}[y] = \int_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2) dx; \quad y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
4.	Найти экстремаль функционала:	$\mathcal{L}[y] = \int_0^1 (2e^y - y^2) dx; \quad y(0) = 1, y(1) = e.$
5.	Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,0)$ до эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.	

Решить дифференциальное уравнение методами: а) Рунге; б) Бунднова-Галеркина:

		а)	б)
1.	$y'' - y + x = 0$	$y(0) = 1$ $y'(1) = 0$	$y(0) = y(1) = 0$

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «индивидуальные задания»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
Зачтено	Правильно решены 90-100% заданий
Не зачтено	Правильно решены менее 90% заданий

Оценочные средства для промежуточной аттестации (зачет)

Вопросы к зачету

1. Изопериметрическая задача. Необходимые условия экстремума классического функционала с дополнительными условиями типа функционала $\int_a^b G(x, y, y') dx = L$, которым должен удовлетворять класс допустимых кривых.
2. Необходимые условия экстремума простейшего функционала $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ на кривых, заданных в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$; тождество, связывающее между собой полученные уравнения Эйлера.
3. Необходимые условия экстремума функционала $J = \int_a^b F(x, y_i, y_i') dx$, зависящего от n функций $y_i(x)$ одного переменного ($i = 1, 2, \dots, n$), где функции y_i удовлетворяют граничным условиям $y_i(a) = A$, $y_i(b) = B$, ($i = 1, 2, \dots, n$).
4. Формулировка определения вариационной производной в общем случае. Понятие вариации функционала $J[y]$ в точке $x = x_0$ для кривой $y = y(x)$; общее выражение для приращения ΔJ функционала в окрестности точки $x = x_0$; условие инвариантности уравнения Эйлера
5. Понятие вариационной производной функционала в случае простейшей задачи вариационного исчисления (с выводом по методу Эйлера).
6. Необходимые условия экстремума функционалов, зависящих от функции нескольких переменных (рассмотреть случай двух переменных, т.е. функционалы типа $J[z] = \iint_G F(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) dx dy$).
7. Уравнения Эйлера для некоторых частных случаев классических функционалов и, связанные с ними, первые интегралы
8. Теорема о достаточных условиях минимума функционала $J[y]$ в произвольном нормированном пространстве.
9. Квадратичные функционалы: определение, примеры. Понятие второй вариации $\delta^2 J[h]$ функционала $J[y]$ и доказательство её единственности. Теорема о необходимых условиях экстремума функционала $J[y]$.
10. Определение и доказательство единственности первой вариации $\delta J[h]$ (первого дифференциала) функционала $J[y]$, - если она существует. Теорема о необходимых условиях экстремума функционала.
11. Приращение функционала $\Delta J[h] = J[y + h] - J[y]$ в произвольном нормированном пространстве; определение экстремума (минимума - максимума); понятие слабого и сильного экстремума; их сравнительный

анализ.

12. Определение линейного функционала в произвольном нормированном пространстве и лемма 3 для функционала $\int_a^b [a(x)h(x) + a(x)h'(x)]dx$.
13. Определение линейного функционала в произвольном нормированном пространстве и лемма 2 для функционала $\int_a^b a(x)h'(x)dx$.
14. Определение линейного функционала в произвольном нормированном пространстве и лемма 1 для функционала $\int_a^b a(x)h(x)dx$.
15. Функционал в произвольном нормированном пространстве: определение, понятие непрерывности; пример функционала, непрерывного по норме пространства D_1 и не являющегося непрерывным по норме пространства C .
16. Сходимость по норме в линейных нормированных пространствах. Основные свойства.
17. Определение функционального пространства, линейного нормированного пространства. Примеры.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «промежуточный контроль» (зачёт)

Характеристика знания предмета и ответов	Зачеты
Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.	зачтено
Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.	
Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.	
Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы.	не зачтено

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)

Экспертное заключение

Представленный фонд оценочных средств (далее – ФОС) по дисциплине «Краевые задачи и вариационное исчисление» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые формы и средства текущего и промежуточного контроля адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины представлены в полном объеме.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанный и представленный для экспертизы фонд оценочных средств рекомендуется к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической
комиссии факультета компьютерных
систем и информационных
технологий



Ветрова Н. Н.