

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Факультет компьютерных систем и информационных технологий

Кафедра прикладной математики



УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета компьютерных
систем и информационных технологий

Кочевский А. А.

« 10 » апреля 2023 г.

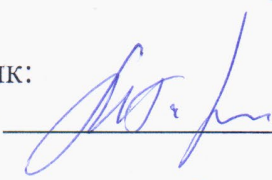
ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по учебной дисциплине

«Функциональный анализ»

01.03.02 Прикладная математика и информатика

«Математическое и программное обеспечение вычислительных машин и
компьютерных сетей»

Разработчик:

профессор  Таращанский М. Т.

ФОС рассмотрен и одобрен на заседании кафедры прикладной математики
от 18 апреля 2023 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой



Малый В. В.

Луганск 2023 г.

**Паспорт
фонда оценочных средств по учебной дисциплине
«Функциональный анализ»**

**Перечень компетенций (элементов компетенций),
формируемых в результате освоения учебной дисциплины**

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Формулировка контролируемой компетенции	Контролируемые темы учебной дисциплины	Этапы формирования (семестр изучения)
1	ОПК-1	способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Тема 1. Элементы теории множеств Тема 2. Линейные функциональные пространства Тема 3. Нормированные пространства, линейные операторы и функционалы. Тема 4. Гильбертовы пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы. Вполне непрерывные операторы Тема 5. Теория меры и интеграла	основной (5)
2.	ОПК-2	способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	Тема 1. Элементы теории множеств Тема 2. Линейные функциональные пространства Тема 3. Нормированные пространства, линейные операторы и функционалы. Тема 4. Гильбертовы пространства. Сопряженные и самосопряженные	основной (5)

			операторы. Вполне непрерывные операторы Тема 5. Теория меры и интеграла	
--	--	--	--	--

**Показатели и критерии оценивания компетенций,
описание шкал оценивания**

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Показатель оценивания (знания, умения, навыки)	Контролируемые темы учебной дисциплины	Наименование оценочного средства
1	ОПК-1	знать: определение метрического пространства, полного метрического пространства, примеры метрических пространств; определение открытых, замкнутых, ограниченных, всюду плотных, нигде не плотных множеств в метрических пространствах; принцип вложенных шаров в полном метрическом пространстве; принцип сжимающих отображений и примеры его применения к алгебраическим, дифференциальным и интегральным уравнениям; определение компактного множества в метрическом пространстве, критерий компактности Хаусдорфа; критерий компактности множеств в пространствах $C_{[a,b]}$ и $l_{p,p \geq 1}$; определение линейного нормированного пространства, банахова пространства, примеры линейных	Тема 1. Тема 2. Тема 3. Тема 4. Тема 5.	Фронтальные и индивидуальные опросы; контрольные работы; промежуточная аттестация (экзамен)

		нормированных пространств; определение линейного функционала и линейного оператора; определение ограниченного линейного функционала и ограниченного линейного оператора, понятие нормы функционала и оператора; общий вид непрерывного линейного функционала в $C[a, b]$ и $l_p, p \geq 1$; теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха об обратном операторе; понятие предгильбертова и гильбертова пространства, примеры гильбертовых пространств; понятие проекции вектора на подпространство в гильбертовом пространстве, понятие ортогонального дополнения; ортонормированные системы векторов в гильбертовых пространствах, полиномы Лежандра; коэффициенты Фурье и их минимальное свойство, ряды Фурье; неравенство Бесселя и равенство Парсеваля; полнота тригонометрической системы в $L_2[a, b]$; теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве. уметь: использовать основные понятия и		
--	--	---	--	--

		методы функционального анализа; решать типовые задачи; использовать утверждения и теоремы функционального анализа при исследовании математических моделей на предмет существования решения, построения приближенного решения, устойчивости построенной аппроксимационной схемы приближенного решения, обращаться к информационным системам (Интернет, справочная и другая математическая литература) для пополнения и уточнения математических знаний. владеть навыками: применения понятийного аппарата и методов функционального анализа для выражения количественных и качественных отношений, математическими методами и алгоритмами в приложениях к техническим наукам. Тема 1, Тема 2, Тема 3, Тема 4, Тема 5, Фронтальные и индивидуальные опросы; контрольные работы; задания; экзамен		
2	ОПК-2	знать: определение метрического пространства, полного метрического пространства, примеры метрических	Тема 1. Тема 2. Тема 3. Тема 4. Тема 5.	Фронтальные и индивидуальные опросы; контрольные работы; промежуточная

		пространств; определение открытых, замкнутых, ограниченных, всюду плотных, нигде не плотных множеств в метрических пространствах; принцип вложенных шаров в полном метрическом пространстве; принцип сжимающих отображений и примеры его применения к алгебраическим, дифференциальным и интегральным уравнениям; определение компактного множества в метрическом пространстве, критерий компактности Хаусдорфа; критерий компактности множеств в пространствах $C[a, b]$ и $l_p, p \geq 1$; определение линейного нормированного пространства, банахова пространства, примеры линейных нормированных пространств; определение линейного функционала и линейного оператора; определение ограниченного линейного функционала и ограниченного линейного оператора, понятие нормы функционала и оператора; общий вид непрерывного линейного функционала в $C[a, b]$ и $l_p, p \geq 1$; теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза,		аттестация (экзамен)
--	--	--	--	----------------------------------

		Банаха об обратном операторе; понятие предгильбертова и гильбертова пространства, примеры гильбертовых пространств; понятие проекции вектора на подпространство в гильбертовом пространстве, понятие ортогонального дополнения; ортонормированные системы векторов в гильбертовых пространствах, полиномы Лежандра; коэффициенты Фурье и их минимальное свойство, ряды Фурье; неравенство Бесселя и равенство Парсеваля; полнота тригонометрической системы в $L_2[a,b]$; теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве. уметь: использовать основные понятия и методы функционального анализа; решать типовые задачи; использовать утверждения и теоремы функционального анализа при исследовании математических моделей на предмет существования решения, построения приближенного решения, устойчивости построенной аппроксимационной схемы приближенного решения, обращаться к		
--	--	---	--	--

		информационным системам (Интернет, справочная и другая математическая литература) для пополнения и уточнения математических знаний. владеть навыками: применения понятийного аппарата и методов функционального анализа для выражения количественных и качественных отношений, математическими методами и алгоритмами в приложениях к техническим наукам. Тема 1, Тема 2, Тема 3, Тема 4, Тема 5, Фронтальные и индивидуальные опросы; контрольные работы; задания; экзамен		
--	--	---	--	--

Фонды оценочных средств по дисциплине «Функциональный анализ»

Вопросы для фронтальных и индивидуальных опросов:

Тема 1. Элементы теории множеств.

- Доказать тождества: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$; $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$; $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$; $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$; $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$; $(\bar{A} \cup B) \cap A = A \cap B$; $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$; $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
- Доказать, что если отношения Φ_1 и Φ_2 симметричны, то симметричны и отношения $\Phi_1 \cup \Phi_2$; $\Phi_1 \cap \Phi_2$; Φ_1^{-1} ; $\Phi_1 \cdot \Phi_2^{-1}$.
- Пусть $f: X \rightarrow Y, A \in X, B \in Y$. Доказать, что $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$; $f(A) \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$; $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B)$

4. Пусть $f: X \rightarrow Y, A \in X, B \in Y$. Доказать, что $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B)$;
 $f(A) \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$
5. Доказать, что объединение $\phi_1 \cup \phi_2$ эквивалентностей ϕ_1 и ϕ_2 на A является эквивалентностью на A тогда и только тогда, когда $\phi_1 \cup \phi_2 = \phi_1 \circ \phi_2$.
6. Доказать, что произведение $\phi_1 \circ \phi_2$ эквивалентностей ϕ_1 и ϕ_2 на A является эквивалентностью на A тогда и только тогда, когда $\phi_2 \circ \phi_1 = \phi_1 \circ \phi_2$.
7. Вывод формул двойственности для теоретико-множественных операций.
8. Доказать счетность объединения не более чем счетного набора счетных множеств.
9. Доказать, что при добавлении к бесконечному множеству конечного или счетного множества образуется множество, эквивалентное исходному.

Тема 2. Линейные функциональные пространства.

10. Из каких элементов состоит пространство l^2 ? Приведите пример элемента $x \in l^2$ и пример элемента $y \notin l^2$.
11. Как вычисляются расстояние, норма, скалярное произведение в пространстве l^2 ?
12. Из каких элементов состоит пространство $C[0;1]$? Приведите пример элемента $x \in C[0;1]$ и пример элемента $y \notin C[0;1]$.
13. Как вычисляются расстояние и норма в пространстве $C[a;b]$?
14. Из каких элементов состоит пространство $C^1[0;1]$? Приведите пример элемента $x \in C^1[0;1]$ и пример такого элемента y , что $y \in C[0;1], y \notin C^1[0;1]$.
15. Из каких элементов состоит пространство $C^k[a;b]$? Как между собой упорядочены пространства $C^k[a;b]$ при разных $k=1,2,3,\dots$?
16. Из каких элементов состоит пространство $L^2(0;1)$? Приведите пример элемента $x \in L^2(0;1)$ и пример элемента $y \notin L^2(0;1)$.
17. Привести (с обоснованием) примеры метрических и нормированных пространств (включая $C[a,b], C_2[a,b], C^1[a,b], l_1, l_2$).
18. Вывести неравенство Коши–Буняковского и ввести стандартную норму в предгильбертовом пространстве. Привести примеры предгильбертовых пространств и нормированных пространств, не являющихся предгильбертовыми.
19. Вывести тождество параллелограмма и, используя его, привести примеры нормированных пространств, для которых норма не порождается какими-либо скалярными произведениями.
20. Сформулировать теорему об эквивалентности любых двух норм в конечномерном нормированном пространстве. Вывести следствия,

касающиеся полноты и сепарабельности конечномерных нормированных пространств.

21. Привести примеры открытых множеств (включая лежащие в $C[a,b]$). Доказать теорему об объединениях и пересечениях открытых множеств и (схематично) теорему о структуре открытых множеств вещественной прямой.

22. Привести примеры замкнутых множеств. Доказать а) теорему, характеризующую замкнутые множества как дополнения к открытым, и б) теорему об объединениях и пересечениях замкнутых множеств.

23. Доказать теорему, характеризующую замкнутые множества в терминах сходящихся последовательностей точек.

24. Доказать: если некоторое множество плотно в другом, которое плотно в третьем, то и исходное множество плотно в третьем. Установить сепарабельность пространств R^n , $C[a,b]$, $C_2[a,b]$, l_1 и l_2 и привести пример несепарабельного метрического пространства.

25. Установить полноту пространств R^n , $C[a,b]$, l_1 , l_2 и привести примеры неполных метрических пространств.

Тема 3. Нормированные пространства, линейные операторы и функционалы.

26. Сформулировать теорему об эквивалентности любых двух норм в конечномерном нормированном пространстве. Вывести следствия, касающиеся полноты и сепарабельности конечномерных нормированных пространств.

27. Привести примеры открытых множеств (включая лежащие в $C[a,b]$). Доказать теорему об объединениях и пересечениях открытых множеств и (схематично) теорему о структуре открытых множеств вещественной прямой.

28. Привести примеры замкнутых множеств. Доказать а) теорему, характеризующую замкнутые множества как дополнения к открытым, и б) теорему об объединениях и пересечениях замкнутых множеств.

29. Доказать теорему, характеризующую замкнутые множества в терминах сходящихся последовательностей точек.

30. Доказать: если некоторое множество плотно в другом, которое плотно в третьем, то и исходное множество плотно в третьем. Установить сепарабельность пространств R^n , $C[a,b]$, $C_2[a,b]$, l_1 и l_2 и привести пример несепарабельного метрического пространства.

31. Установить полноту пространств R^n , $C[a,b]$, l_1 , l_2 и привести примеры неполных метрических пространств.

32. Доказать эквивалентность свойств непрерывности и ограниченности линейных отображений (операторов). Привести примеры таких операторов, включая интегральные операторы.

33. Привести примеры сжимающих отображений. Доказать теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Как найти такую точку с заранее заданной точностью?
34. Рассказать о приложениях теоремы о неподвижной точке в теории интегральных уравнений. Показать на примере, как строятся последовательные приближения к такой точке.
35. Примеры пополнений метрических пространств. Сформулируйте теорему о существовании пополнений. Какие особенности имеет случай нормированных пространств?

Тема 4. Гильбертовы пространства. Сопряженные и самосопряженные операторы. Вполне непрерывные операторы.

36. Доказать теорему Пифагора (необходимое и достаточное условие сходимости ортогонального ряда в гильбертовом пространстве). Сформулировать достаточное условие сходимости ряда в банаховом пространстве. Привести примеры применения этих теорем.
37. Доказать существование и единственность ортогональной проекции точки гильбертова пространства на произвольное подпространство. Как связаны понятия проекции и элемента наилучшего приближения?
38. Вывести общее неравенство Бесселя и объяснить его связь с классическим неравенством Бесселя.
39. Как из неравенства Бесселя вывести утверждение о сходимости ряда Фурье в гильбертовом пространстве?
40. Доказать, что коэффициенты разложения элемента гильбертова пространства по ортонормированной системе совпадают с соответствующими коэффициентами Фурье.
41. Доказать теорему о разложении в ряд Фурье по ортонормированному базису и вывести ее следствие для классических рядов Фурье.
42. Вывести критерий полноты ортогонального семейства и доказать теорему о существовании ортонормированных базисов. Привести примеры таких базисов.
43. Доказать теорему об изоморфизме сепарабельных вещественных гильбертовых пространств одинаковой размерности.

Тема 5. Теория меры и интеграла.

44. Привести примеры алгебр, сигма-алгебр и мер, включая дискретные меры. Доказать свойства монотонности и полуаддитивности мер.
45. Доказать свойства непрерывности мер.
46. Изложить (схематично) доказательство существования меры Лебега.
47. Какие свойства имеют обобщенные функции распределения? Как по ним строятся соответствующие меры Стильтьеса? Какие особенности имеет случай абсолютно непрерывных мер?

48. Привести примеры множеств лебеговой меры 0 на прямой и плоскости. Доказать лемму о вариантах определения измеримой функции
49. Определить интеграл Лебега и вывести его свойство линейности, а также правило интегрирования неравенств в случае ступенчатых функций. Сформулируйте аналогичные утверждения для неотрицательных измеримых функций и укажите идею соответствующих доказательств.
50. Доказать свойство линейности интеграла Лебега и правило интегрирования неравенств вместе с его следствиями в случае суммируемых функций общего вида.
51. Вычислить интеграл Лебега от функции, равной нулю почти всюду. Доказать (частично) теорему о счетной аддитивности интеграла. Как вычисляется интеграл по дискретной мере?
52. Опишите (с обоснованием) связь между интегралами Лебега, а также Лебега–Стилтьеса и интегралом Римана (включая и случай несобственного интеграла Римана).
53. Приведите примеры сходимости почти всюду. Сформулируйте теоремы Егорова, Луна и Фубини.
54. Докажите теорему Лебега о мажорируемом предельном переходе. Сформулируйте теорему Леви о предельном переходе и лемму Фату.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «фронтальный и индивидуальный опрос»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объеме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно четкие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Контрольные работы:

Типовые варианты контрольных работ

Вариант 1.

1. Доказать, что любое измеримое множество E на прямой с мерой $\mu(E) = p > 0$ содержит измеримое подмножество меры q , $0 < q < p$.
2. Эквивалентны ли метрики $\rho(f, g) = \max_{[a, b]} |f(x) - g(x)|$ и

$$\sigma(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \text{ на } C[a, b]?$$

Вариант 2.

1. Пусть E – измеримое на сегменте $[0, 1]$ и для любого интервала Δ имеет место неравенство $\mu(E \cap \Delta) \leq \alpha \mu(\Delta)$, $\alpha < 1$. Доказать, что $\mu(E) = 0$.
2. Пусть (a_n) и (b_n) – последовательности точек нормированного пространства X , причём (a_n) сходится, а (b_n) расходится. Сходится ли последовательность $(a_n + b_n)$?

Вариант 3.

1. Пусть A_1 и A_2 – измеримые подмножества сегмента $[0, 1]$ и $\mu(A_1) + \mu(A_2) > 1$. Доказать, что $\mu(A_1 \cap A_2) > 0$.
2. Привести пример фундаментальной, но не сходящейся последовательности в пространстве $\mathbf{R}$ с метрикой $\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{|x - y| + 1}$.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «контрольная работа»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
5	Контрольная работа выполнена на высоком уровне (правильные ответы даны на 90-100% вопросов/задач)
4	Контрольная работа выполнена на среднем уровне (правильные ответы даны на 75-89% вопросов/задач)
3	Контрольная работа выполнена на низком уровне (правильные ответы даны на 50-74% вопросов/задач)
2	Контрольная работа выполнена на неудовлетворительном уровне (правильные ответы даны менее чем на 50%)

Оценочные средства для промежуточной аттестации (экзамен)

Типовые экзаменационные билеты

ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. ДАЛЯ Кафедра прикладной математики Вариант 1

1. Метрическое пространство, основные метрические пространства
2. Дана ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве со скалярным произведением. Найти угол между векторами x и y .

$$x = e_7 - \left(\frac{e_{23}}{2} + \frac{e_{24}}{3} \right), \quad y = 0.5(e_2 - 3e_{24}) + e_7$$

3. Пусть S – полукольцо. Доказать, что система $R = \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i : A_i \in S, i = 1, 2, \dots, n \right\}$ является кольцом.

Утверждено на заседании кафедры прикладной математики _____, протокол _____

Зав. кафедрой
Экзаменатор

Малый В.В.
Таращанский М. Т.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству промежуточный контроль (экзамен)

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобренны изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)

Экспертное заключение

Представленный фонд оценочных средств (далее – ФОС) по дисциплине «Функциональный анализ» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые формы и средства текущего и промежуточного контроля адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины представлены в полном объеме.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанный и представленный для экспертизы фонд оценочных средств рекомендуется к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической
комиссии факультета компьютерных
систем и информационных
технологий



Ветрова Н. Н.